1004 Kantorovitch ノ B_2 空間ニツイテ

小笠原 藤次郎(廣文理大)

Banach 空間論ノ立場カラ B_2 空間 (Kantorovitch, Recueil Math 2 (1937) 121–168) ニツイテ簡單ナ考察ヲ加ヘヤウ。

§1. Banach lattice トソノ共軛空間.

E ハ vector lattice デ norm ガ定義サレ之レニヨッテ normed space ヲ作リ $|x| \leqq |y|$ ノトキ $\|x\| \leqq \|y\|$ ガ成立スルモノトスル。

E ガ norm ニヨッテ完備ノトキ Banach lattice ト呼ブコトニスル。E ノ共軛空間 $\overline{E}$ ハ任意ノ $x \geqq 0$ ニ對シ常ニ $f(x) \geqq 0$ トナル $f \in \overline{E}$ ヲ $f \geqq 0$ ト定メルコトニヨリ $\overline{E}$ ハ complete vector lattice トナルコト, 又 $\|f\| = \||f|\| = l.u.b.\ (|f(x)|;\ \|x\| \leqq 1,\ 0 \leqq x \in E)$ ガ容易ニ確メラレルカラ $\overline{E}$ ハ Banach lattice デアルコトガ分ル。E ト $\overline{E}$ ノ關係ヲ双對的立場カラ觀察スルタメ $\overline{\overline{E}}$ ヲ考ヘル。任意ノ $f \geqq 0$ ニ対シ $f(x) \geqq 0$ ノトキ $x \geqq 0$ ナルコト $f(x_+) = l.u.b.\ (f'(x):\ 0 \leqq f' \leqq f)$ ヲ確メルコ

トニヨッテEハ$\overline{\overline{E}}$ノ中ニBanach空間トシテノvector latticeトシテ埋蔵サレルコトガ分ル。

従ッテEハvector latticeトシテcompleteナBanach latticeニ埋蔵サレル。コノコトカラモEノnormニヨル完備化ハBanach latticeナルコトガ知ラレル。Eノ可附番部分集合ヲ考ヘコレヲ含ム最小ノEノvector sub-latticeヲ考ヘnormニヨル完備化ヲ行ヘバ可分ナBanach latticeガ得ラレル，コレモ容易ニ分ルコトト思フ。

Eト$\overline{E}$ノnormノ関係ヲ見ルタメニEニ於テ$x>0$, $y>0$, $x\wedge y=0$ノトキ$\|x+y\|=\{\|x\|^p+\|y\|^p\}^{\frac{1}{p}}$, $1\leqq p\leqq+\infty$ ($p=+\infty$ノトキコノ式ノ右辺ハ$\max(\|x\|, \|y\|)$ヲ表スモノトスル)ナル関係ガ成立スル場合ヲ考ヘテ見ル，且ツEガBanach latticeノトキ抽象L_p空間ト呼ブコトニスル。$\overline{E}$ハ抽象L_q空間トナルコトガ証明出来ル。茲ニqハ$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ニヨッテ定マル数デアル。コレニハ$f>0$, $g>0$, $f\wedge g=0$ノトキ$\|f+g\|=\text{l.u.b.}(f(x)+g(y);\ 0\leqq x, y\in E, x\wedge y=0, \|x+y\|\leqq 1)$ヲ証明スルコトガ必要ニナル。又$1<p<+\infty$ノトキspectral分解ノ式カラEハuniformly convexニナルコトガ知ラレル。

§2. Kantorovitchノ意味デregularナBanach lattice.

EヲBanach latticeトシテBanachノ本ノ意味デweakly completeトスル（コノ要求ハ以下ノ

議論カラ分ルト思フ)。

次ノ二ツノ性質ガ成立スル。 (α) $x_n \downarrow 0$ ノトキ $\|x_n\| \to 0$ (β) $0 \leqq x_n \leqq x_{n+1}$, $\|x_n\|$ ガ有界ノトキ $\bigvee x_n$ ガ存在スル。

(α) ハ $\bar{E}$ ノ単位球ノ内 $f \geqq 0$ ナル要素全体ハ E ノ要素ニヨル弱位相化ニヨリ bicompact トナルコト及ビ x_n ガ 0 ニ弱収斂スルコトヨリ (β) ハ $\{x_n\}$ ノ弱収斂極限ガ $\bigvee x_n$ トナルコトカラ証明出来ル。(β) カラ E ハ σ-complete vector lattice ナルコトガ知ラレル。今條件 (γ) ヲ $0 < x < y$ ノトキ $\|x\| < \|y\|$ ト定義スル。

定義 (α), (β), (γ) ガ成立スル Banach lattice ヲ B_2 空間 (Kantorovitch: 上掲論文, 153 頁) トイフ。

B_2 空間ハ Kantorovitch ノ意味デ regular (同上, 138) デアルコトガ知ラレテオル。

定義. Kantorovitch ノ意味デ regular ナ (α), (β) ノ成立スル Banach lattice ヲ K_2 空間トイフ。

(Kantorovitch-Vulich, Compositio Math. 5 (1937) 119-165).

ノ定義ヲ用ヒ出スナラバ次ノ定理ガ得ラレル。

定理 1. 可分 (Banach 空間トシテノ) ナ Banach lattice E ガ (α), (β) ヲ満足スルトキ E ハ K_2 空間デアル。

(証) (β) カラ E ハ σ-complete, E ノ可分カラ E

ハ complete vector lattice トナル。(o)－収斂ト complex norm デノ(k)－収斂，(t)－収斂ト norm ニヨル(b)－収斂ノトノ一致ヲ証明シテ regularity ノ二ツノ條件(Kantorovitch，上掲，138)ヲ確メレバヨイ。

定理2. 可分ナ Banach lattice E ガ weakly complete ノトキ E ハ K_2 空間デアル。

(証) 本節ノ所論カラ(α)，(β)ガ成立スル。從ッテ定理1カラ E ハ K_2 空間。

定理3. Banach lattice E ガ weakly complete 且ツ(γ)ガ成立スルトキ E ハ B_2 空間デアル。

(証) (α)，(β)，(γ)ガ成立スルカラ。

系. weakly complete ナ抽象 L_1 空間ハ B_2 空間デアル。

(証) (γ)ノ成立ガ証明出来ルカラ。

定理4. Banach 空間トシテ regular ナ Banach lattice E ハ可分ノトキ K_2 空間デアル。

(証) E ハ weakly complete トナルカラ定理2カラ。

定理5. Banach 空間トシテ regular ナ Banach lattice E ニ於テ(γ)ガ成立スルトキ E ハ B_2 空間デアル。

(証) E ハ weakly complete トナルカラ定理

ヨカラ。

定理6. uniformly convex ナ Banach lattice E ハ B_2 空間デアル。

(証) 角谷氏ソノ他ノ研究ニヨッテ E ハ regular ナ Banach 空間。(γ) ノ成立ハ自明，從ッテ定理5カラ。

系. 抽象 L_p 空間 $1<p<+\infty$ ハ B_2 空間デアル。

(証) §1 ノ所論ニヨリ L_p ハ uniformly convex ナ Banach lattice トナルカラ。

定理7. 定理4ノ條件"可分"ハイラナイ。

証. E ノ任意ノ部分集合 A ヲ考ヘルトキ $\vee A$ ガ A ノ高々可附番部分集合ノ l.u.b. トナルコトヲ示セバ充分。
A ガ (o)-有界ノトキ A ノ高々可附番部分集合ノ l.u.b. ノ集合 $\{x_\alpha\}$ ヲ考ヘスベテノ第一級，第二級ノ順序数ニツイテ $\alpha<\beta$ ノトキ $x_\alpha < x_\beta$ トナルコトガ矛盾スルコトヲ示セバヨイ。コレハコノ § ノ始メニ述ベタ考ヘ方ニヨッテ容易ニ示セル。